部分多様体の共形不変量 (部分多様体の微分幾何学)

数理解析研究所講究録
408巻 1980年 137-140

部分多様体の共形不変量

広大 総合　　安部 直人

先ず部分多様体の概念を拡張し、そこで共形不変量の考察をします。実は後者の方が主目的だったのですが、最近になり「拡張の意義」についていろいろな方から御質問があったので、そちらに的をしぼり、共形不変量の方は少し触れるだけにします。 $M, \bar{M}$ を smooth な多様体とする。

定義. 次のようなものが存在する時、M の $\bar{M}$ への m.r.l.-imbedding が与えられたと云うことにする：

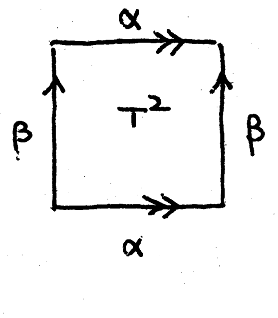
(i) M の open covering $\{U_\lambda\}$

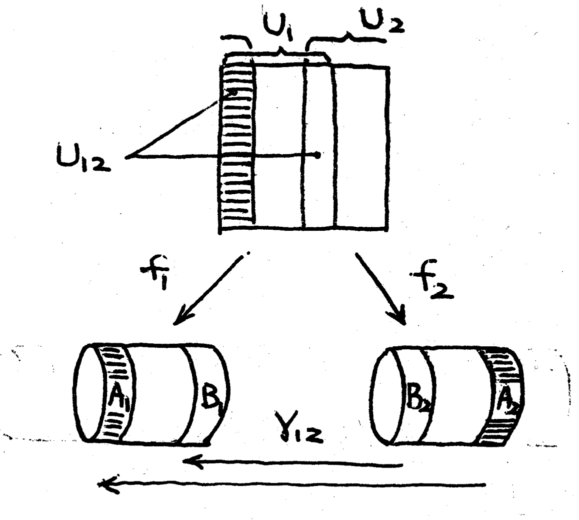
(ii) U_λ の $\bar{M}$ への imbedding f_λ

(iii) $U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ の時、$f_\mu(U_{\mu\lambda})$ の近傍から $f_\lambda(U_{\lambda\mu})$ の近傍への $\bar{M}$ の local diffeo. $\gamma_{\lambda\mu}$ で $U_{\lambda\mu}$ において $f_\lambda = \gamma_{\lambda\mu} \circ f_\mu$ を満足する。更に $\gamma_{\lambda\lambda} = id_{\bar{M}}$, $U_{\lambda\mu\nu} := U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \phi$ の時 $f_\nu(U_{\lambda\mu\nu})$ の近傍で $\gamma_{\lambda\mu} \circ \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\lambda\nu}$ が成立するものとする。

以後、M と $\bar{M}$ は Riemann 多様体で f_λ, $\gamma_{\lambda\mu}$ は isometric か conformal の場合のみ扱います。先ず isometric の時には、normal bundle, normal connection, 第2基本量等の部分多様体（M の global な immersion が与えられた場合）に定義される概念がそのまま拡張される。各点の近傍で local isometric imbedding が（バラバラに）与えられている場合と global isometric immersion との間には大きな gap があるが、m.r.l.-imbedding は、それらの中間に位置するものと思われる。次のような簡単な例を考えてみます。

例。 $M = T^2$: flat torus, $\bar{M} = E^N$: Euclid 空間とする。T^2 の E^N への isometric imbedding は global には $N \geqq 4$ で、local には $N \geqq 2$ で可能である。m.r.l.-imbedding は以下のように $N \geqq 2$ で可能である。先ず $N=3$ の時、例えば、平均曲率が正定数になるようなものは、次のように作る。





ここでγ_{12}はAとBをそれぞれ重ねるE^3の2つの運動を、それぞれA_2とB_2の十分小さい近傍に制限して得られる。T^2の分割を増せば、各$\gamma_{\lambda\mu}$をE^3のglobalな運動としてとることもできる。このm.r.l.-imbeddingは、$\pi_1(M)$の生成元でαに対応するものを、Mの分割によりきって作られている。同様にして、αとβに対応する生成元をきるような分割を考えると、E^2へのm.r.l.-imbeddingを与えることができる。

この例からも明らかなように、$\bar{M}$が定曲率の場合には、rigidityにより$\gamma_{\lambda\mu}$は限られたものになり、Mの位相構造の方が表に出て来る。

次にconformalの場合を考える。この時は、$\bar{M}=E^N$でも話はずっと複雑になる。E^Nへのconformal m.r.l.-imbeddingが存在するための必要条件を求めるために、Chern-Simonsの共形不変量に関する結果[CS, Th.5.14]を調べてみる。先ず、inverse Pontrjagin formに関する結果については、globalの場合と同様に成立するが、整数性に関しては一般に成立しない。次に、$\bar{M}$へのconformal m.r.l.-imbeddingが与えられた時には、[A]で定義した部分多様体の共形不変量が、そのまま定義される。(以前、学会で発表したものと全く同じ形で定義する。)

参考文献

[A] N. Abe, On generalized total curvatures and conformal mappings, 準備中.

[CS] S.S. Chern and J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math. 99 (1974), 48-69